例析2023年河北中考数学卷

河北师大附属实验中学　姚英艳

2023年河北中考数学卷较之于2022年，难度有所增加，作为选拔性的试卷，难点比较分散，很多题目中都设置了较难突破的环节，不仅有较高的区分度，也着重凸显了对数学核心素养的考察。

初中阶段，核心素养主要表现为：抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念，模型观念、应用意识、创新意识。

义务教育阶段，数学课程内容由数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个学习领域组成。下面选择的几个题目属于前两类，我们分类以题目的突破过程，着重分析试题考察了学生的哪些能力。

一、数与代数

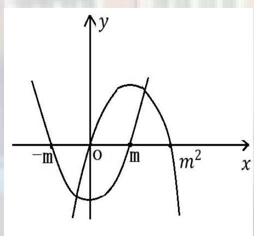
1. 数形结合突破16题

16. 已知二次函数 $y=-x^2+m^2x$ 和 $y=x^2-m^2$（m是常数）的图象与x轴都有两个交点，且这四个交点中每相邻两点间的距离都相等,则这两个函数图象对称轴之间的距离为(　　)

A. 2　　B. m^2　　C. 4　　D. $2m^2$

解：由$y=-x^2+m^2x$，得$y=-x(x-m^2)$，由$y=x^2-m^2$，得$y=(x+m)(x-m)$

所以两个二次函数如图所示：



不妨设$m>0$，

则$y=(x+m)(x-m)$与x轴的两个交点分别为$(-m,0)$，$(m,0)$；

而$y=-x(x-m^2)$与x轴的两个交点分别为（0，0），（m^2，0）；

由题：四个交点中每相邻两点间的距离都相等

则有：$m^2-m=m$，

解得：$m=2$.

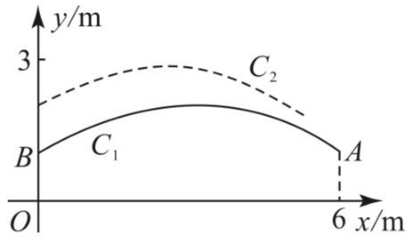
解析：此题给出了含有参数m二次函数解析式，已知图像与x轴的交点特征，来求两个二次函数对称轴的距离，突破问题的关键是将一般式换为“根式”，用m表示出交点坐标，根据“四个交点中每相邻两点间的距离都相等”，可画出图形，通过这两者确定等量关系，从而构建关于m的方程，这其中蕴含数形结合的思想，它也是学习函数最重要的数学思想方法。

2. 真实情境转化为数学问题突破 23 题

23.　嘉嘉和淇淇在玩沙包游戏．某同学借此情境编制了一道数学题，请解答这道题．

如图，在平面直角坐标系中，一个单位长度代表 1m 长．嘉嘉在点 $A(6，1)$处将沙包（看成点）抛出，并运动路线为抛物线C_1：$y=a(x-3)^2+2$ 的一部分，淇淇恰在点 $B(0，c)$处接住，然后跳起将沙包回

其运动路线为抛物线C_2：$y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{n}{8}x+c+1$ 的一部分．



（1）写出C_1的最高点坐标，并求 a，c 的值；

（2）若嘉嘉在 x 轴上方 $1m$ 的高度上，且到点 A 水平距离不超过 $1m$ 的范围内可以接到沙包，求符合条件的 n 的整数值．

23 题第（1）问很常规，解题过程如下：

（1）因为C_1过 A(6,1)，　所以 $1=a(6-3)^2+2$，

所以$a=-\frac{1}{9}$，

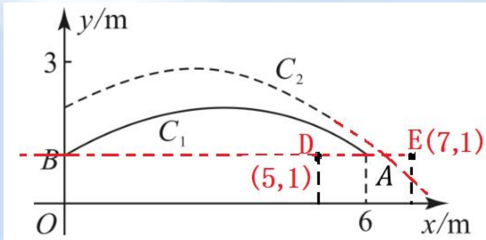
所以 $y=-\frac{1}{9}(x-3)^2+2$，令$x=0$，则$y=1$，

所以 B(0,1)，即$c=1$

第（2）问难度不小，学生需要跨越真实情境“在 x 轴上方 1m 的高度上，且到点 A 的水平距离不超过 1m 的范围内接住沙包”到底将怎样的转化为数学问题，用已有的数学知识解决这样的问题。

下面给出这一问的两种做法：

解法（一）



由题接住沙包的位置在线段 CD 上，其中 C（5,1），D(7,1)，

将这两点的坐标分别代入C_2，$y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{n}{8}x+2$

得：$1=-\frac{1}{8}\times5^2+\frac{n}{8}\times5+2$ 和 $1=-\frac{1}{8}\times7^2+\frac{n}{8}\times7+2$

解得：$n=\frac{17}{5}$ 和$n=\frac{41}{7}$

由图可知：$\frac{17}{5}\le n\le\frac{41}{7}$，

因为n为整数，所以$n=4$ 或 5

解法（二）

由题能接住沙包即抛物线C_2: $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{n}{8}x+2$ 与直线$y=1$ 有交点，且交点在 C（5,1）与 D(7,1)之间，

所以由图可知：当$x=5$ 时，$y\ge1$，且当$x=7$ 时，$y\le1$

即：

$$\begin{cases}-\frac{1}{8}\times5^2+\frac{n}{8}\times5+2\ge1\\-\frac{1}{8}\times7^2+\frac{n}{8}\times7+2\le1\end{cases}$$

，整理得：

$$\begin{cases} n \geq \dfrac{17}{5} \\ n \leq \dfrac{41}{7} \end{cases}$$

所以，$\frac{17}{5} \leq n \leq \frac{41}{7}$

因为n为整数，所以$n = 4$ 或 5

解法（三）

由题能接住沙包即抛物线C_2: $y =-\frac{1}{8}x^2 + \frac{n}{8}x + 2$ 与直线$y = 1$ 有交点，且交点在 C（5,1）与 D(7,1)之间，

由

$$\begin{cases} y =-\dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{n}{8}x + 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

得交点坐标为（$\frac{n+\sqrt{n^2+32}}{2}$,1）

由题：$5 \leq \frac{n+\sqrt{n^2+32}}{2} \leq 7$,

解得，$\frac{17}{5} \leq n \leq \frac{41}{7}$

因为n为整数，所以$n = 4$ 或 5

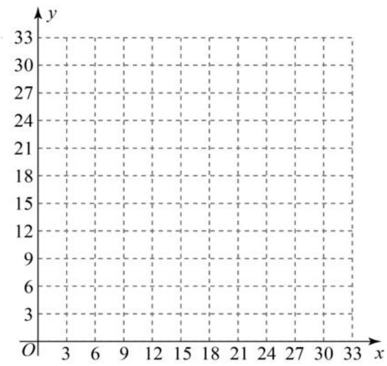
解析：这三种解法的共同点都是将生活情境转化为数学问题，解法一来源于对于图形的感性认识，也就是接住沙包的边界位置所对应的n的值，分别是n的最大值和最小值，解法三是普适性的方法，但本题计算量过大，学生不易操作成功，比较而言，解法二就显得既轻松，又严谨，将生活情境转换为数学情境C_2: $y =-\frac{1}{8}x^2 + \frac{n}{8}x + 2$ 与直线

$y=1$有交点，且交点在C（5,1）与D(7,1)之间，同时又将这个数学问题用不等式问题知识解决，这种连续的转化是等价的，也凸显了数形结合思想的重要作用。

3.如何突破25题中难点

25.　在平面直角坐标系中，设计了点的两种移动方式：从点$(x，y)$移动到点$(x+2，y+1)$称为一次甲方式：从点$(x，y)$移动到点$(x+1，y+2)$称为一次乙方式.

例、点P从原点O出发连续移动2次；
若都按甲方式，最终移动到点$M(4，2)$；
若都按乙方式，最终移动到点$N(2，4)$；
若按1次甲方式和1次乙方式，最终移动到点$E(3，3)$.

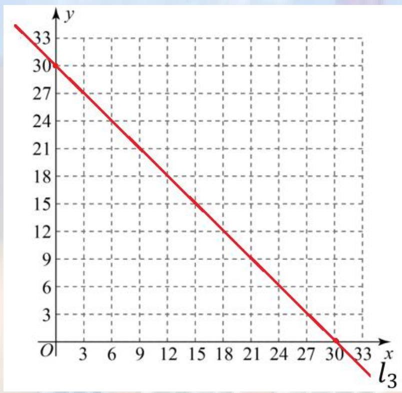


（1）设直线l_1经过上例中的点$M，N$，求l_1的解析式；
并直接写出将l_1向上平移9个单位长度得到的直线l_2的解析式；

（2）点P从原点O出发连续移动10次，每次移动按甲方式或乙方式，最终移动到点$Q(x，y)$．其中，按甲方式移动了m次.
①用含m的式子分别表示$x，y$；
②请说明:无论m怎样变化，点Q都在一条确定的直线上.设这条直线为l_3，在图中直接画出l_3的图象；

（3）在（1）和（2）中的直线$l_1，l_2，l_3$上分别有一个动点$A，B，C$，横坐标依次为$a，b，c$，若A，B，C三点始终在一条直线上，直接写出此时a，b，c之间的关系式.

25题的文字量大，三大问，难度逐步增加，有很强的选拔功能。



先给出前两问的做法：

（1）设$l_1:y=kx+b$,因为过M（4,2）与N(2,4)

则：

$$\begin{cases}4k+b=2\\2k+b=4\end{cases}$$

，解得：

$$\begin{cases}k=-1\\b=6\end{cases}$$

所以$l_1:y=-x+6$，$l_2:y=-x+15$

（2）①：由题，点 P 按甲方式移动了m次，则按照了乙方式移动了$(10-m)$次

则：$x=0+2m+10-m$，$y=0+m+2(10-m)$

所以，$x=m+10$，$y=-m+20$

②：由①，Q（$m+10,-m+20$）且$x=m+10$，$y=-m+20$

所以$x+y=m+10-m+20=30$,

所以$l_3: y=-x+30$,

解析：第（2）中的②对于学生比较困难，难点在于说明动点在一条确定的直线上，也就是需要先通过消去参数m，得到关于x,y 的二元一次方程 $x+y=30$，再将表达式进行整理就是一次函数l_3的解析式，$y=-x+30$，这也说明在平时的教学中要注意知识之间的联系，对于课上精讲的例题需要进行纵深上的研究，尽最大的力量多挖掘知识与知识之间的联系。

（3）解法一：

由题 A（$a,-a+6$）与 B($b,-b+15$)，C($c,-c+30$)

设 A,B 两点满足的解析式为：$y=mx+n$

所以

$$\begin{cases} ma+n=-a+6 \\ mb+n=-b+15 \end{cases}$$

，解得：

$$\begin{cases} m=-1+\dfrac{9}{b-a} \\ n=6-\dfrac{9a}{b-a} \end{cases}$$

所以$y=(-1+\frac{9}{b-a})x+6-\frac{9a}{b-a}$，

因为 A，B，C 始终在一条直线上

所以$-c+30=(-1+\frac{9}{b-a})c+6-\frac{9a}{b-a}$

整理得：$5a+3c=8b$

解法二：由题 A（$a,-a+6$）与 B($b,-b+15$)，C（ $c,-c+30$ ）

因为 A，B，C 始终在一条直线上

所以，$\frac{-b+15-(-a+6)}{b-a}=\frac{-b+30-(-a+6)}{c-a}$

整理得：$5a+3c=8b$

解析：第（3）中数学情境比较简单，是三点共线问题，解法一比较自然，已知两点坐标，用待定系数法求这两点所满足的解析式，在计算方面有一定的难度，需要吧字母a，b看做常量，用它们表示系数m

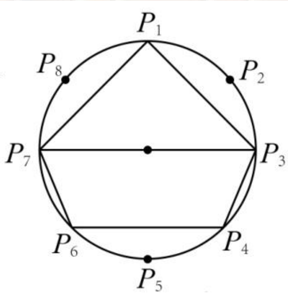
与n,再将点 C 的坐标进行代入，整理之后可得a，b，c之间的关系式；解法二比较快捷，用了三点共线的一个等价的命题三点中，有公共点的过两点的直线斜率相等，虽然这样的命题在高中比较常见，但是在平时的教学中是可以渗透的，这也对平时的教学提出了更高的要求。

二、图形与几何

1. 突破第 9 题的两个角度

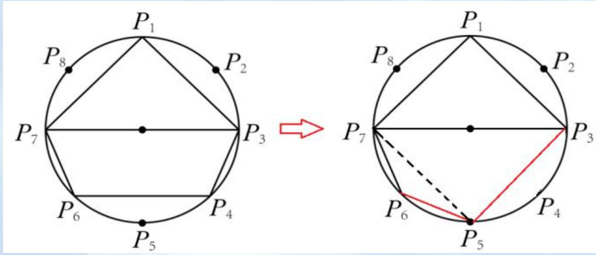
9. 如图，点$P_1\sim P_8$是$\odot O$ 八等分点.若$\triangle P_1P_3P_7$，四边形$P_3P_4P_6P_7$的周长分别为 a，b，则下列正确的是(　　)

A. $a<b$　　B. $a=b$　　C. $a>b$　　D. a，b 大小无法比较



角度一：图形非常直观，凭直觉猜测，再测量验证

由图，$a=P_1P_7+P_1P_3+P_3P_7$，$b=P_6P_7+P_3P_4+P_4P_6+P_3P_7$，a 与 b 的大小取决于$P_1P_7$、$P_1P_3$的长度的和与$P_6P_7$、$P_3P_4$、$P_4P_6$的长度的和的大小的判断，运用直尺测量可验证 $a<b$ 的猜想。



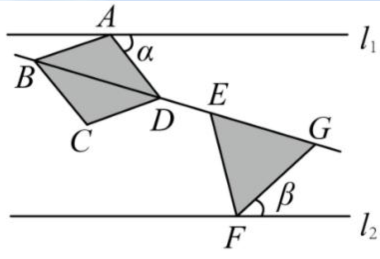
角度二：通过转化，数学建模

由图，运用圆中，等角对等弦可将 b 的长度转化为四边形$P_7P_6P_5P_3$的周长，连接P_7P_5，易知 a 的长度等于三角形$P_7P_5P_3$的周长，在$\Delta P_7P_6P_5$中，由三角形的性质，$P_7P_6+P_6P_5>P_7P_5$，所以 $a<b$。

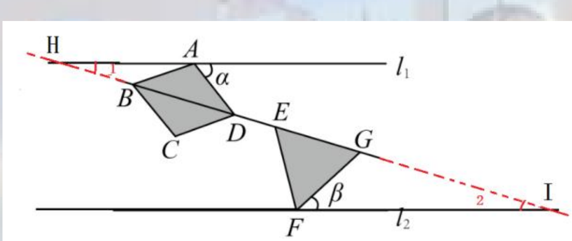
2. 巧作辅助线转化思想突破 15 题

15.如图，直线$l_1 \parallel l_2$，菱形 $ABCD$ 和等边Δ EFG 在l_1，l_2之间，点 A，F 分别在l_1，l_2上，点 B，D，E，G 在同一直线上：若$\angle\alpha=50°$，$\angle ADE=146°$，则$\angle\beta=$（　　）

A. 42°　　B. 43°　　C. 44°　　D. 45°



如图，延长线段 BG，分别交直线l_1，l_2于点 H、G，



因为∠ADE=146°，所以∠ADH=34°

在ΔADH 中，∠α=∠1+∠ADH，因为∠α $=50°$

所以∠1=16°，

因为$l_1 // l_2$

所以∠2=∠1=16°，

在ΔGFI 中，∠EGF=∠2+∠β，因为∠EGF = 60°,

所以∠β=44°

解析：这条辅助线是线段 BG 的延长线，有了它，就能应用平行线性质将两线平行转化为两角相等，也就是借助第三条直线作为桥梁，就可以将已知角α，∠ADE 与未知角β联系在了一起，从而解出β。

3. 26 题全面考察学生的能力

26.如图 1 和图 2，平面上，四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=2\sqrt{11}$,$CD=12$，$DA=6$，$\angle A=90°$，点 M 在 AD 边上，且 $DM=2$.将线段 MA 绕点 M 顺时针旋转 $n°(0<n\le 180)$到 MA'，$\angle A'MA$ 的平分线 MP 所在直线交折线 $AB—BC$ 于点 P，设点 P 在该折线上运动的路径长为 $x(x>0)$，连接$A'P$.

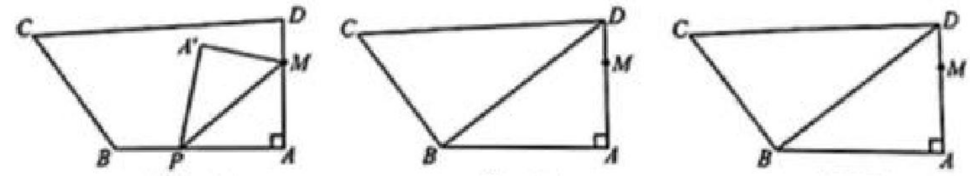


图 1　　图 2　　备用图

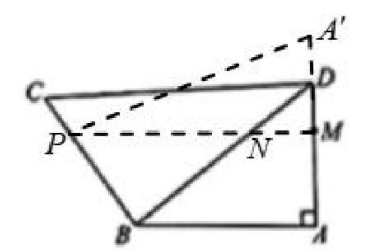
（1）若点 P 在 AB 上，求证：$A'P=AP$;

（2）如图 2．连接 BD.

①求$\angle CBD$ 的度数，并直接写出当 $n=180$ 时，x 的值；

②若点 P 到 BD 的距离为 2，求 $\tan\angle A'MP$ 的值；

（3）当 $0<x\le 8$ 时，请直接写出点A'到直线 AB 的距离.（用含 x 的式子表示）



26 题是一个几何情境比较清晰的题目，题目由易到难，考察了学生依次应用数学模型解决问题的能力，考察了几何说理的严谨性。

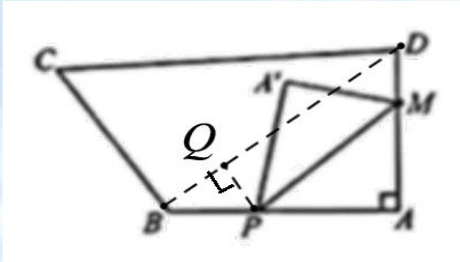
第（1）问，比较简单，应用三角形全等证明线段相等；

第（2）问①，前一问，在三角形中，利用勾股定理及逆定理求线段长度及角度；

后一问，需按题意画出图示：x 的长度即为线段 AB 与 PB 长度之和，在求线段 PB 长度的过程中，两次应用了三角形相似，难度虽然不大，但考察学生动手操作作图的能力，模型应用的意识；

第（2）问②，我们先给出解题过程：

i，如图，若点 P 在直线 AB 上



过点 p 作 PQ⊥BD,垂足为 Q，则 PQ=2

因为$\angle PQB=\angle DAB=90°$，$\angle PBQ=\angle ABD$

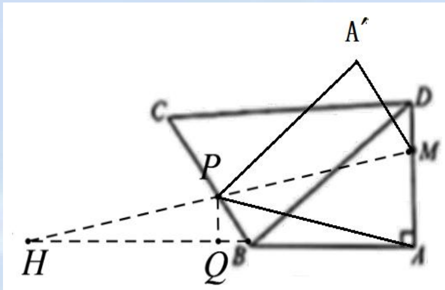
所以$\Delta PBQ\sim\Delta DAB$，

所以$\frac{PQ}{PB}=\frac{DA}{BD}$，即$\frac{2}{PB}=\frac{6}{10}$解得：PB=$\frac{10}{3}$，

所以 AP=8−$\frac{10}{3}$ = $\frac{14}{3}$,

所以 RtΔMAP 中，$\tan\ \angle A'MP=\tan AMP=\frac{AP}{AM}=\frac{\frac{14}{3}}{4}=\frac{7}{6}$

ii,如图，若点 P 在直线 BC 上,由题 PB⊥BD,则 PB=2



过点 p 作 PQ⊥AB,垂足为 Q,

因为$\angle PQB=\angle DAB=90°$，$\angle PBQ=90°-\angle DBA=\angle BDA$

所以$\Delta PBQ\sim\Delta BDA$，

所以$\frac{PB}{DB}=\frac{PQ}{AB}=\frac{QB}{DA}$，即$\frac{2}{10}=\frac{PQ}{8}=\frac{QB}{6}$

所以 PQ= $\frac{8}{5}$，QB= $\frac{6}{5}$

因为$\tan\ \angle HPQ=\tan HMA$

所以$\frac{HQ}{\frac{8}{5}}=\frac{HQ+\frac{6}{5}+8}{4}$，解得：HQ= $\frac{92}{15}$

所以 RtΔHMA 中，$\tan\ \angle A'MP=\tan\angle HMA=\tan HPQ=\frac{\frac{92}{15}}{\frac{8}{5}}=\frac{23}{6}$

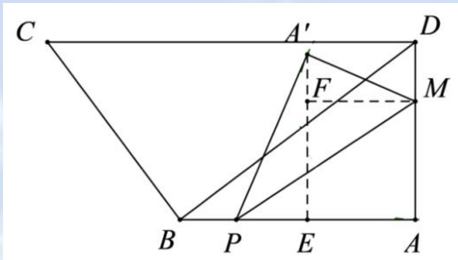
综上，$\tan\ \angle A'MP=\frac{7}{6}$ 或 $\frac{23}{6}$

此问虽已接近尾声，仍不可掉以轻心，仔细分析题意，动点 P 到

BD 的距离为 2，有两种情况，需要分类解决，无论是哪种情况，都需要发现或构造相似三角形，尤其对于第二类，依旧是将$\angle A'MP$的正切值转化为$\angle HMA$的正切值，根据已有的条件，需要作出辅助线 PQ，从而构造出 K 字型相似模型，才能将未知和已知联系起来，达到解决问题的步骤。

第（3）问，要求用含 x 的代数式表示目标线段的长度

先给出以下两种做法：



解法(一)：由题，$0 < x \leq 8$，则点 P 在线段 AB 上，过点A'作$A'E \perp AB$，垂足为 E，作$MF \perp A'E$，垂足为 F，则四边形 AMFE 为长方形设$A'E = h$，则 h 为所求，设 AE=y=MF，则 PE=x-y，

由题易证得$\Delta A'PE \sim \Delta MA'F$

所以$\frac{A'P}{MA'} = \frac{PE}{A'F} = \frac{A'E}{MF}$，即$\frac{x}{4} = \frac{x-y}{h-4} = \frac{h}{y}$

所以$y = \frac{4h}{x}$，所以$\frac{x}{4} = \frac{x-\frac{4h}{x}}{h-4}$，

解得：$h = \frac{8x^2}{16+x^2}$

解法(二)：由题，$0 < x \leq 8$，则点 P 在线段 AB 上，过点A'作$A'E \perp AB$，垂足为 E，作$MF \perp A'E$，垂足为 F，则四边形 AMFE 为长方形设$A'E = h$，则 h 为所求，设 AE=y=MF，则 PE=x-y，

由题：$S_{\Delta A'PE} + S_{梯形A'EAM} = S_{四边形A'pAM}$，即$\frac{1}{2}(x-y)h + \frac{1}{2}(4+$

$\hbar\ )y = 4x$

所以 $y = (2 - \frac{h}{4})x$ ，

在 $Rt\Delta A'PE$ 中，$A'P^2 = PE^2 + A'E^2$, 即 $x^2 = (x - y)^2 + \hbar^2$

所以 $x^2 = [x - (2 - \frac{h}{4})x]^2 + \hbar^2$ ，

解得：$h = \frac{8x^2}{16+x^2}$

最后一问难度最大，第一种解法利用了两个三角形相似得到三组对应边成比例，第二种解法利用了等面积法及勾股定理，它们的共同特点与难点都是思维过程要经历抽象，即需要引入字母，构建数学模型，利用数学模型中的的两组等量关系，构造了两个方程，每个方程中都含有三个未知数，通过消元，最终用含有 x 的代数式表示目标线段 h，两种方法都有较大的运算量，都蕴含了方程思想，转化的思想。