



走近数学史（四）——圆周率的故事

河北师范大学附属实验中学 杨双梅

上篇文章给大家介绍了祖冲之和祖暅[gèng](456年-536年)父子。他们一起圆满解决了球面积的计算问题，得到正确的体积公式，并据此提出了著名的“祖暅原理”。即“幂势既同则积不容异”，即等高的两立体，若其任意高处的水平截面积相等，则这两立体体积相等。大家看到祖冲之的名字还会想到什么呢？那一定是圆周率吧，下面我们一起来了解一下圆周率的计算吧。

一、刘徽与割圆术

魏晋时期的刘徽，是一名非常出色的数学家，在数学领域中占据着重要的地位。在计算圆周率方面，也做出了自己巨大的贡献，最早提出了用“割圆术”来计算圆周率。这个办法体现出来刘徽本人的大智慧，“割圆术”被后人所认同，并得到广泛的流传。

在《九章算术》中提到过“周三径一”。这“周三径一”的意思是圆周率的大概值为三。刘徽认为这个结果太模糊了，不够精确，不可以作为圆周率的数值。刘徽发明“割圆术”的由来也比较有趣。牛顿被苹果树下的苹果砸了，发现了万有引力定律，而刘徽是在看石匠切割石头时得出的灵感。刘徽在无意中看到石匠的工作，觉得这过程很有趣，便在一旁观看起来。石匠把一块方形的石头，依次切去了四个角，然后再把由四个角得来的八个角依次切掉。以此类推，石匠把这些产生的角依次切掉，直到石头变成无角的，到最后就变成了圆滑的柱子了。刘徽从石匠开始到结束工作，一直都在旁边观看着，他由



石头想到了圆，也进一步想到了圆周率，他按照石匠的方法，一步步切割圆，然后再计算圆周率，最终得出了明确的圆周率的数值。石匠每天切割石头的工作，都有人看见，而由此想到办法的，也只是刘徽。被苹果砸过的人，也不只是牛顿，而万有引力定律的发现，也只是牛顿，有所成就的人都善于观察生活，并从中得到灵感，解决困扰自己的问题。

刘徽从石匠切割石头中得到启发，发明了“割圆术”给后人计算圆周率提供了一个可行的逻辑思维和严密的计算方法，他的事迹一直被后人流传着。刘徽著有著名的《九章算术注》以及《海岛算经》。这两部作品在我国数学领域也发挥着极大的作用。

二、祖冲之与圆周率

祖冲之是我国历史上南北朝的大数学家和天文学家。在他小的时候，祖父经常给祖冲之讲一些科学家的故事。其中张衡发明地动仪，可以预测地震的故事深深打动了祖冲之幼小的心灵。一天晚上，祖冲之躺在床上想起白天老师说的“圆周是直径的3倍”，可是他总觉得这话似乎不对。第二天早晨，他就拿了一段绳子跑到村头的路旁，等待过往的车辆，来了一辆马车，祖冲之叫住马车，对驾车的老人说：“让我用绳子量量您的车轮行吗？”老人点点头。

祖冲之用绳子把车轮量了一下，又把绳子折成同样大小的3段，再去量车轮的直径。量来量去，他发现，车轮的直径确实不是圆周长的 $\frac{1}{3}$ 。祖冲之站在路旁，一连量了好多辆马车的车轮的直径和周长，得出的结论是一样的。这究竟是为什么？这个问题一直在他的脑



海里萦绕，他决心要解开这个谜。而后，经过多年的努力研究，祖冲之在刘徽创造的用“割圆术”求圆周率的科学方法基础上，运用开密法，经过反复演算求出圆周率为： $3.1415927 > \pi > 3.1415926$ 。这是当时世界上最精确的数值，他也成为世界上第一个把圆周率的准确数值计算到小数点以后第7位数字的人。

祖冲之的具体运算过程已经失传，但可以肯定的是，这一定是一项耗费时间长，考量耐心细心的研究工作。如果祖冲之采用的完全是刘徽的“开密法”，要得出8位数的结果，他就一定要在前人刘徽的基数正3072边形上不断割下去，要割到什么时候为止呢？

后人做了一个推算，大概需要在一个大圆内接正12288边形！祖冲之算得的圆周率在当时的世界遥遥领先，过了将近一千年，直到15世纪初，阿拉伯数学家卡西求得圆周率的17位小数值，才打破祖冲之的纪录。

祖冲之的这一成果，给当时的人们帮了大忙，要知道那时的量器大多是圆柱状的，以前很难精确计算其容积量。此后，人们制造量器时，就采用祖冲之推算的数值，减少了误差，为日常生活提供了方便。

甚至连现在的不少IT界人士都认祖冲之为“祖宗”。因为当年英特尔公司推出的奔腾，正是通过运行 π 的计算，才发现芯片运算有问题。现在计算 π ，已经成为一个标准的电脑测试程序以此来验证计算机的各项性能，特别是运算速度与计算过程的稳定性。

圆周率的计算，是祖冲之在数学上的一项杰出贡献，数学界曾提议将圆周率命名为“祖率”，便是为了纪念祖冲之的贡献。祖冲之不



仅在中国享有盛名，在世界上也广为人知。为纪念这位伟大的古代科学家，国际天文学家联合会将月球背面的一座环形山命名为“祖冲之环形山”，并将南京紫金山天文台于1964年发现的1888小行星命名为“祖冲之小行星”。巴黎“发现宫”科学博物馆的墙壁上著文介绍了祖冲之求得的圆周率，莫斯科大学礼堂的走廊上镶嵌有祖冲之的大理石塑像。

三、蒲丰问题与圆周率

公元1777年的一天，法国科学家D·蒲丰(D·uffon1707~1788)的家里宾客满堂，原来他们是应主人邀请前来观看一次奇特试验的，试验开始，但见年已古稀的蒲丰先生兴致勃勃地拿出一张纸来，纸上预先画好了一条条等距离的平行线。接着他又抓出一大把原先准备好的小针，这些小针的长度都是平行线间距离的一半然后蒲丰先生宣布：“请诸位把这些小针一根一根往纸上扔吧！不过，请大家务必把扔下的针是否与纸上的平行线相交告诉我。”

客人们不知蒲丰先生要干什么，只好客随主便，一个个加入了试验的行列。一把小针扔完了，把它捡起来又扔。而蒲丰先生本人则不停地在一旁数着、记着，如此这般地忙碌了将近一个钟头。最后，蒲丰先生高声宣布：“先生们，我这里记录了诸位刚才的投针结果，其中与平行线相交的有704次，投针总数2212，计算得到投针2212次与相交数704的比值为3.142。到这里，蒲丰先生故意停了停，并对大家报以神秘的一笑，接着有意提高声调说：“先生们， π 的近似值！这就是圆周率 π ”。这可是与圆半点也不沾边，众宾哗然，一时议论



纷纷，个个感到莫名其妙；“圆周率 π 呀！诸位，这里用的是概率的原理”，蒲丰先生似乎猜透了大家的心思，得意洋洋地解释道：“不过，要想弄清 π 的更精确的近似值。需要大家有耐心再增加投针的次数，如想得到其间的道理，只好请大家去看敝人的新作了。”随着蒲丰先生扬了扬自己手上的一本《或然性算术实验》的书。

在这种纷纭杂乱的场合出现，实在是出乎人们的意料，然而它却是千真万确的事实。由于投针试验的问题，是蒲丰先生最先提出的，所以数学史上就称它为蒲丰问题。

布丰投针实验是第一个用几何形式表达概率问题的例子，他首次使用随机实验处理确定性数学问题，为概率论的发展起到一定的推动作用。

四、蒙特卡罗方法

法国数学家布丰(1707-1788)最早设计了投针试验。并于1777年给出了针与平行线相交的概率的计算公式 $P=2L/\pi a$ (其中 L 是针的长度， a 是平行线间的距离， π 是圆周率)。由于它与 π 有关，于是人们想到利用投针试验来估计圆周率的值。

值得注意的是这里采用的方法：设计一个适当的试验，它的概率与我们感兴趣的一个量(如 π)有关，然后利用试验结果来估计这个量，随着计算机等现代技术的发展，这一方法已经发展为具有广泛应用性的**蒙特卡罗方法**。

在用传统方法难以解决的问题中，有很大一部分可以用概率模型进行描述。由于这类模型含有不确定的随机因素，分析起来通常比确



定性的模型困难.有的模型难以作定量分析,得不到解析的结果,或者是虽有解析结果,但计算代价太大以至不能使用.在这种情况下,可以考虑采用 Monte Carlo 方法.下面通过例子简单介绍 Monte Carlo 方法的基本思想.

Monte Carlo 方法是计算机模拟的基础,它的名字来源于世界著名的赌城--摩纳哥的蒙特卡罗,其历史起源于 1777 年法国科学家蒲丰提出的一种计算圆周 π 的方法--随机投针法,即著名的蒲丰投针问题.

Monte Carlo 方法的基本思想是首先建立一个概率模型,使所求问题的解正好是该模型的参数或其他有关的特征量.然后通过模拟一统计试验,即多次随机抽样试验(确定 m 和 n),统计出某事件发生的百分比.只要试验次数很大,该百分比便近似于事件发生的概率.这实际上就是概率的统计定义.利用建立的概率模型,求出要估计的参数.蒙特卡洛方法属于试验数学的一个分支.

五、祖冲之的其他贡献

圆周率这一巨大的光环,让很多人忽视了祖冲之的博学多才.祖冲之的数学研究成果后来汇集成《缀术》一书,唐朝时它曾被当作国子监的数学课本.他在南京求学、任教、做科研期间,在多个领域都取得了不可忽视的成就.最值得一提的,是他在天文历法方面的贡献.这主要是指祖冲之于公元 462 年编制成功的《大明历》.他从亲自测量计算的大量资料中,对比分析发现过去历法的严重误差,并勇于改进,编制成功了《大明历》,开辟了历法史的新纪元.



在《大明历》中，祖冲之首次运用“岁差”测定每一回归年的天数，结果跟现代科学测定的只相差 50 秒。其中所使用的回归年日数、交点月日数、木星公转周期、五大行星会合周期等数据也都相当精确。此外，他还发明了用圭表测量冬至前后若干天的正午太阳影长以定冬至时刻的方法，这个方法也为后世长期采用。

祖冲之申请改用《大明历》的举动，对传统的天地、星月、历法带来冲击，因此引来朝臣一边倒的质疑。守旧势力抬出古圣先贤的招牌来压制祖冲之，认为“冬至时的太阳总在一定的位置上，这是古圣先贤测定的，是万世不能改变的”，并且指责说，“祖冲之以为冬至点每年有稍微移动，是诬蔑了天，违背了圣人的经典，是一种大逆不道的行为”当时的祖冲之只有 30 岁出头，步入仕途不久，官阶很低，但他无所畏惧、据理力争。他写了一篇有名的《驳议》，根据古代文献记载和多年来亲自观测的数据，证明冬至点的确是有变动的，坚定地表示：“决不应该盲目迷信古人。既然发现了旧历法的缺点，又确定了新历法有许多优点，就应当改用新的。祖冲之严谨求实的精神和有理有据的驳议，赢得了这场大辩论。最终，宋孝武帝决定在宋大明九年(465)改行新历。

可惜好事多磨。就在大明八年，孝武帝死了，改历的事也被搁置。南齐时又有一个太子支持改历，也因太子去世而错过了机会。一直到祖冲之去世后 10 年，即梁天监九年(510)，《大明历》才以《甲子元历》之名颁行。

祖冲之还提出了闰月法。在此前的 1000 多年里，我国历法家一



向把 19 年定为计算闰年的单位，期间含有 7 个闰年(13 个月)。但这样不够周密、精确。祖冲之吸取了前人的先进理论，加上自己的观察，提出了 391 年内 144 闰的新法，这在当时算是最精密的了。

祖冲之还是位杰出的机械制造师。他的祖父祖昌，做过刘宋朝的大匠卿，这是掌管土木工程的大官。祖冲之天生就心灵手巧，加上受到良好的教育，因此在机械制造上多有发明。

祖冲之在新亭江(在今南京市西南)为他的“千里船”所做的处女航，虽然在今天看来速度并不快，但验证了一种高效的推进方法。在当时，船只是以风力和人力作动力，以桨、槽等作为推进工具。而祖冲之发明的这种船，能“不劳人力”作为动力源，又“不因风水”影响高机动性。后来祖冲之儿子祖暕做了掌管船舶制造和运输的太舟卿，或许与他父亲的这项发明有些关系

祖冲之的指南车构造精巧、运转灵活，索驭麟只得认输，并把自己的指南车毁掉了

根据文献记载，可以知道祖冲之的指南车是利用齿轮互相带动的结构制成的，达到指南的功能，而且使用了离合器，与现代结构相差无几。

祖冲之也制造了很有用的劳动工具，比如水碓磨。它是用水力驱动水轮，代替人脚来拨动碓杵的尾端，使其能舂谷。在这个基础上，他又研究了水力磨面，并创造性地将水碓和水磨两件东西集中在一起制造出组合式水力工具—水锥磨。齐武帝曾亲自到乐游苑观摩过它，这时的祖冲之已是花甲老人了。

在古代，科学家并不太受重视。祖冲之是少有的、以科学贡献在



正史中有传记的科学家，在《南史》和《南齐书》中都有他的传记。

祖冲之为什么能有这么多的发明。追根究底，与当时南京的人文环境有关。六朝时期的南京城，人口超过 100 万，是世界第一大城市，又是国家的都城，承汉启唐创造了灿烂的“六朝文明”，并在科技、文学、艺术等诸方面达到了空前繁荣。这些为祖冲之的发明创造提供了天时地利人和。

祖冲之年轻时就好学博览，20 岁就被孝武帝派至当时朝廷的学术研究机构华林学省做研究工作，后来又转到设在南京朝天宫冶山的总明观任职。当时的总明观是全国最高的科研学术机构相当于现在的中国科学院

总明观内分设文、史、儒、道、阴阳 5 门学科，实行分科教授制度，请来各地有名望的学者任教，祖冲之就是其一。在这里，祖冲之接触了大量国家藏书，包括天文、历法、术算方面的丰籍，具备了借鉴与拓展的先决条件。