走近数学史（三）——祖暅原理

河北师范大学附属实验中学　杨双梅

五一假期刚过，很开心能看到很多大家出游的美篇，其中不乏美景美图，而这些古今的建筑更让每个中国人感到无比的自豪。在大家欣赏精美建筑之后也可以跟我一起来了解一些数学小知识吧。

明代紫禁城

大兴机场

鸟巢

一、古籍中的数学名词

你听过古籍中的这些词语吗？例如：广、袤、方田（直田）、圭田、箕田、邪田、堑（qiàn）堵、阳马、鳖臑（nào）、牟合方盖、刍（chú ）甍（méng）、刍童、羡除、方池，盘池。看着这些词语，你脑海里会想到什么呢？这些都是古籍中的几何概念，我们一起来了解一些吧。

（一）广、袤

广：东西的长度叫“广”袤：南北的长度为“袤”

不过很多算经中也没有特指东西南北，基本上就可以理解为：广是指长方形的宽，袤是长方形的长。

（二）平面几何里的一些称呼

方田（直田）：长方形，这个从名字上应该不难理解。

圭田：三角形，有时也会指等腰三角形。

箕田：梯形。

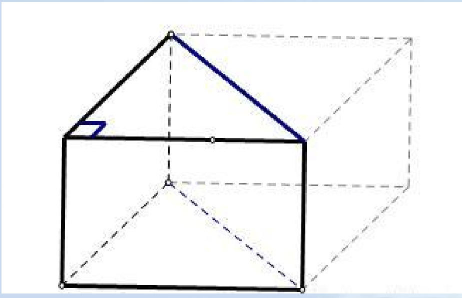
邪田：直角梯形，这个可能是有一边斜了的方田（斜田）叫过来

的吧。

还有圆田、弧田等，这两个看名字就知道什么形状的就不说了。

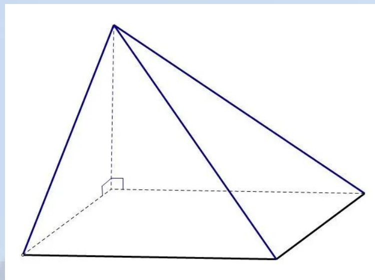
（三）立体几何里的一些称呼

(1)堑（qiàn）堵：上下底面为直角三角形的直三棱柱，也就是长方体斜切开的一半。

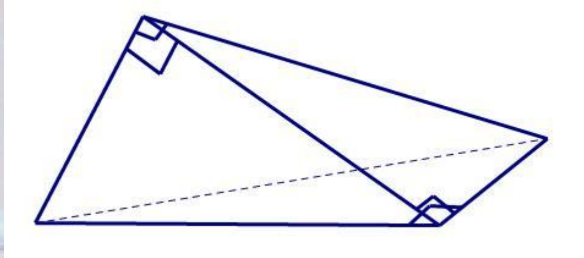


这个形状是高考立体几何中非常常见的形状了，可以举例很多。

（2）阳马：底面为矩形且一条侧棱和底面垂直的四棱锥。



（3）鳖臑（nào）：就是四个面都是直角三角形的三棱锥。这两个形状2015年的湖北高考题中直接体现了出来。



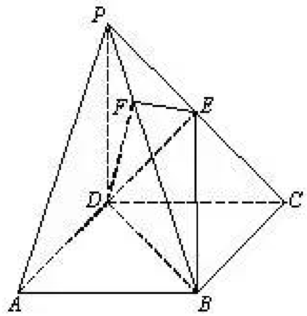
（2015 湖北理 19）

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑．

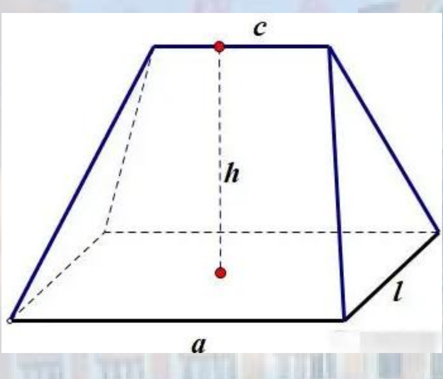
如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，过棱 PC 的中点 E，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F，连接 DE, DF, BD, BE.

（1）证明：$PB\perp$ 平面 DEF．试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

（2）若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\frac{DC}{BC}$ 的值．



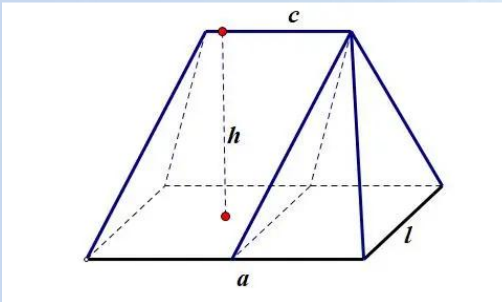
（4）刍（chú ）甍（méng）：底面为长方形，顶棱和底面平行，且长度不等于底面平行的棱长的五面体，这是一个楔形体，有时底面也扩展成平行四边形。



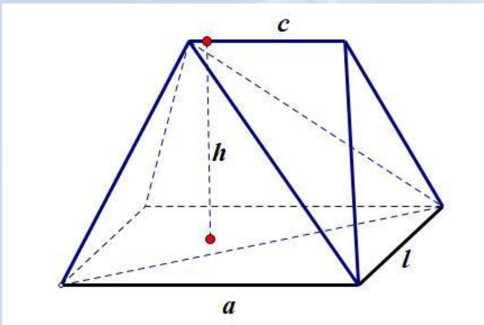
设地面长方形长宽分别为 a，l，上面的顶棱长为 c，顶棱长为 c，

顶棱到底面距离为 h，则该几何体的体积为：$V=\frac{1}{6}(2a+c)lh.$

这个公式的推导方法很多，例如可以分割成一个三棱柱和一个四棱锥分别计算体积再相加。



还可以分割成三个三棱锥或一个三棱锥和一个四棱锥，不过这时计算体积需要利用一些等高的椎体体积之比等于底面面积之比来做。

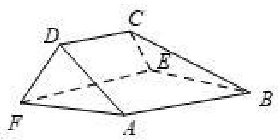


这个形状 2016 年高考题中也能找到，例如：

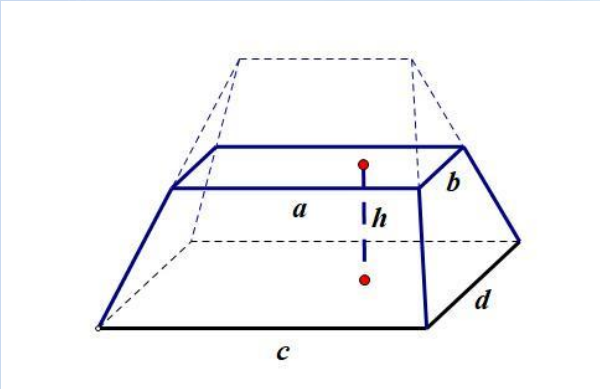
（2016 全国 1 卷理 18）如图所示，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，$AF=2FD$，$\angle AFD=90^\circ$，且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60°．

（1）求证：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$；

（2）求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值．



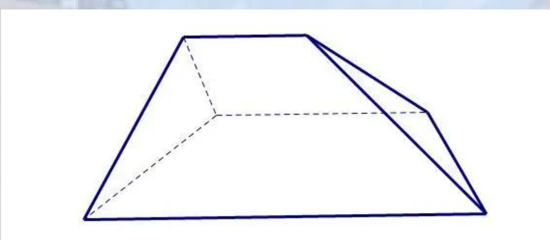
（5）刍童：用平行于刍甍底面的一个面去截刍甍，截面和底面之间的几何体就叫刍童



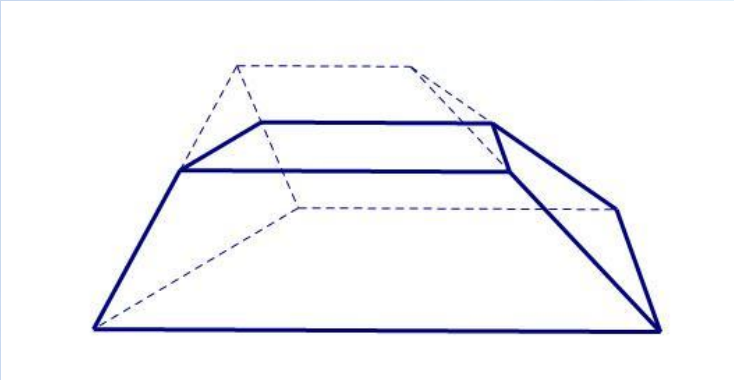
若上底面长宽为 a 和 b，下地面长宽为 c 和 d，几何体高为 h，则这个几何体的体积公式如下：

$$V=\frac{1}{6}\left[(2a+c)b+(a+2c)d\right]\cdot h$$

（6）羡除：三个面为梯形或平行四边形（至多一个侧面是平行四边形），其余两个面为三角形的五面几何体。显然这是刍甍的表兄妹，就是在其基础上把底面改为梯形。



（7）楔形四棱台：刍童也有个表兄妹，若把刍童上下底面平行的矩形换成平行的梯形，即为楔形四棱台（不是台体）。这个也可以说是用一个平行于羡除底面的面去截羡除，截面和底面之间的几何体就是楔形四棱台。



（8）方池，盘池：和刍童形状基本差不多，区别就是刍童下底面大、上底面小，而盘池正好反过来，下底面小、上底面小大。

（9）牟合方盖　是由我国古代数学家刘徽发现的并采用的，一种用于计算球体体积的方法，类似于现在的微元法。由于其采用的模型像一个牟合的方形盒子，故称为牟合方盖。

可以看出这些词汇是来自于生产生活中，对这些实际的某个具体形状计算，中国的古代数学家做的非常出色，甚至可以求解一些立体几何中涉及的三次方程问题。我们再来了解一下古代数学家祖暅和祖暅原理。

二、祖暅和祖暅原理

祖暅[gèng](456 年-536 年)是我国古代最伟大的数学家之一。亦作祖暅之，字景烁，范阳遒县(今河北涞水)人，是中国南北朝时期数学家、天文学家祖冲之之子。同父亲祖冲之一起圆满解决了球面积的计算问题，得到正确的体积公式，并据此提出了著名的"祖暅原理"。

祖冲之父子总结了魏晋时期著名数学家刘徽的有关工作，提出"幂势既同则积不容异"，即等高的两立体，若其任意高处的水平截面积相等，则这两立体体积相等，这就是著名的祖暅公理(或刘祖原理)。

祖暅应用这个原理，解决了刘徽尚未解决的球体积公式。该原理在西方直到十七世纪才由意大利数学家卡瓦列利(Bonaventura Cavalieri)发现，比祖暅晚一千一百多年。

祖暅原理简述

祖暅原理，又名等幂等积定理，内容是:夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平行平面的任何平面所截，如果截得两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等。祖暅之《缀术》有云:"缘幂势既同，则积不容异。

发现过程

等积原理的发现起源于《九章算术》中的答案是错误的。刘徽提出的方法是取每边为1寸的正方体棋子八枚，拼成一个边长为2寸的正方体，在正方体内画内切圆柱体，再在横向画一个同样的内切圆柱体。这样两个圆柱所包含的立体共同部分像两把上下对称的伞，刘徽将其取名为"牟合方盖"。(古时人称伞为"盖"，"牟"同侔，意即相合。)根据计算得出球体积是牟合方盖体的体积的四分之三，可是圆柱体又比牟合方盖大，但是《九章算术》中得出球的体积是圆柱体体积的四分之三，显然《九章算术》中的球体积计算公式是错误的。刘徽认为只要求出牟合方盖的体积，就可以求出球的体积。可怎么也找不出求牟合方盖体积的途径。

祖暅沿用了刘徽的思想，利用刘徽"牟合方盖"的理论去进行体积计算，得出"幂势相同，则积不容异"的结论。"势"即是高，"幂"是面积。

在西方，球体的体积计算方法虽然早已由希腊数学家阿基米德发现，但"祖暅原理"是在独立研究的基础上得出的，且比阿基米德的内容要丰富，涉及的问题要复杂。二者有异曲同工之妙。根据这一原理就可以求出牟合方盖的体积，然后再导出球的体积。

这一原理主要应用于计算一些复杂几何体的体积上面。在西方，直到17世纪，才由意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri.B,1589-1647)发现。于1635年出版的《连续不可分几何》中，提出了等积原理，所以西方人把它称之为"卡瓦列里原理"。其实，他的发现要比我国的祖暅晚1100多年。

对祖暅原理的理解

我们都知道"点动成线，线动成面，面动成体"这句话，直线由点构成，点的多少表示直线的长短;面由线构成，也就是由点构成，点的多少表示面积的大小;几何体由面构成，就是由线构成，最终也就是由点构成，点的多少也表示了体积的大小，要想让两个几何体的体积相等，也就是让构成这两个几何体的点的数量相同，祖暅原理就运用到了它。

两个几何体夹在两平行平面中间，可以理解为这两个几何体平行面间的的高度相等。两平行面之间的距离一定，若视距离为一条线段，那么这个距离上就有无数个点，过一个点，可以画出一个平行于两平行面的截面，若两几何体在被过每一点的平行截面截出的截面面积两两相等，则说明两几何体在同一高度下的每两个截面上的点的数量相同。有无数个截面，同一高度每两个几何体的截面上的点的数量相同，

则说明，这两个几何体所拥有的点数量相同，那么也就是说，它们的体积相同。所以我们可以用这种思想来理解祖暅原理。

四、祖暅原理的意义和影响

首先由祖暅原理，半球与一个拥有与半球体相同横切面积和高的立体，即圆柱体中间切去一个圆锥体体积相同。容易得体积为 4/3×π×r^3(三分之四乘派乘半径的三次方)。

其次在现代的解析几何和测度应用中，祖暅原理是富比尼定理中的一个特例。卡瓦列利没有对这条的严谨证明，只发表在 1635 年的 Geometriaindivisibilibu'以及 1647 年的 ExercitationesGeometrica'中，用以证明自己的 MethodederIndivisibilie'。以此方式可以计算某些立体的体积，甚至超越了阿基米德和克卜勒的成绩。这个定理引发了以面积计算体积的方法并成为了积分发展的一个重要步骤。