浅析 2022 年河北数学中考 25、26 题

师大附属实验中学　姚英艳

今年河北中考的数学卷较之于 2021 年文字量减少，题目难度有所降低，但整份试卷着眼于数学核心素养，关注数学课程标准中最基础、最核心的内容，考察了学生在学习数学和应用数学解决问题的过程中最为重要的，必须掌握的核心方法和技能，同时也注重了初高中知识之间的衔接，显示出它的选拔性功能。下面通过 2022 年中考的 25 题和 26 题的解题分析来说明这一点.

25.(本小题满分 10 分)

如图，平面直角坐标系中，线段 AB 的端点为 A(-8，19)，B(6，5).

(1)求 AB 所在直线的解析式：

(2)某同学设计了一个动画：

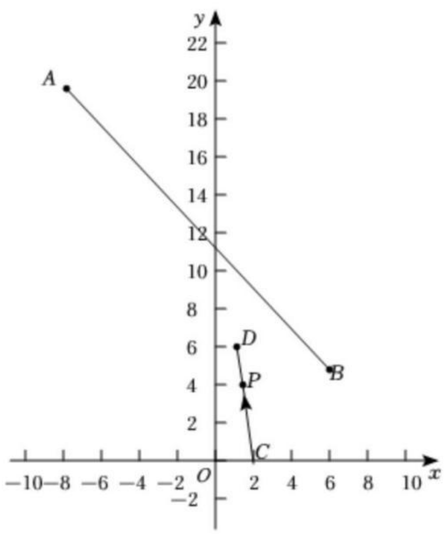
在函数 $y=\boxed{m}x+\boxed{n}$ (m≠0，y≥0)中，分别输入 m 和 n 的值，便得到射线 CD，共中心 C(C，0) .

当 c=2 时，会从 C 处弹出一个光点 P，并沿 CD 飞行; 当 c≠2 时，只发出射线而无光点弹出.

①若有光点 P 弹出，试推算 m，n 应满足的数量关系；

②当有光点 P 弹出，并击中线段 AB 上的整点（横、纵坐标都是整数）时，线段 AB

就会发光.求此时整数 m 的个数.



解题过程：

(1) 设$l_{AB}: y=kx+b$

代入 $A(-8,19)$，$B(6,5)$，

得$\begin{cases}-8k+b=19\\6k+b=5\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-1\\b=11\end{cases}$

所以$l_{AB}: y=-x+11$.

（2）① 因为有光点 P 弹出，把 $C(2,0)$代入$y=mx+n$ ，

得：$0=2m+n$，即$n=-2m$

所以 m，n 应满足的数量关系为：$n=-2m$.

②线段 AB 发光即①中射线与线段 AB 的交点为整点，

设整点为 $P(x_0,y_0)$，

则$y_0=-x_0+11$，且$y_0=mx_0-2m$

所以$-x_0+11=mx_0-2m$

所以$m=\frac{-x_0+11}{x_0-2}=\frac{-x_0+2+9}{x_0-2}=-1+\frac{9}{x_0-2}$

因为$-8\le x_0\le 6$

当$x_0=-7$，-1，1，3，5 时，m分别为整数-2，-4，-10，8，2

所以m的个数为 5 个.

试题分析：

第（1）问非常基础，考察了求一次函数解析式的基本方法——待定系数法，解二元一次方程方程组的基本技能.

第（2）问的问题①没有计算量，但对有的学生却是一个障碍，突破障碍解题的关键在于将生活情境“有光点 P 弹出”转化为数学结论——点 P 在射线 CD 上，从而将生活问题转化为数学问题，将点 C 坐标代入，直接得到 m，n 应满足的关系式.

第（2）问的问题②学生在突破时会存在两个难点，其一理解题意方面存在一定的难度，需要将生活情境“发光时”转化为数学结论——两个一次函数有交点且交点为整点，从而将生活问题转化为数学问题；其二已知两个一次函数有整点，求参数m的取值的问题存在难度，设整点为 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$,构建关于$\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0$的二元一次方程组，这是一个数学抽象，数学建模的过程，列出方程组之后，通过 消元法 将 3 个字母的问题转化为 2 个字母的问题，获得参数m与整点横坐标x_0，或纵坐标y_0的直接关系，这其中蕴含函数与方程、转化的思想，也是学生数学素养与解题能力的体现.

26.(本小题满分 12 分)

如图 1，四边形 ABCD 中，AD∥BC，∠ABC=90°，∠C=30°，AD=3，AB=$2\sqrt{3}$，DH⊥BC 于点 H. 将△PQM 与该四边形按如图方式放在同一平面内，使点 P 与 A 重合，点 B 在 PM 上，其中∠Q=90°，∠QPM=30°，PM=$4\sqrt{3}$.

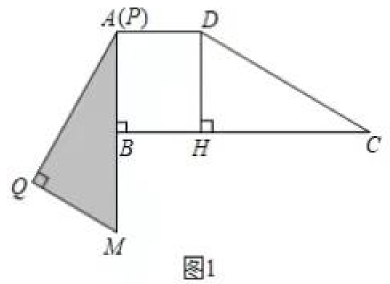


图1

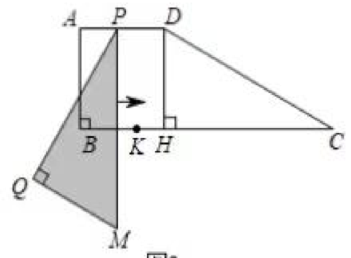


图2

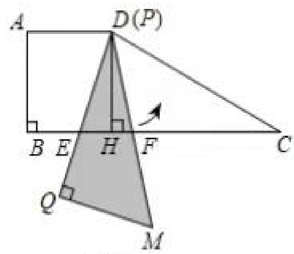


图3

(1)求证：△PQM≌△CHD；

(2)△PQM 从图 1 的位置出发，先沿着 BC 方向向右平移（图 2），当点 P 到达点 D 后立刻绕点 D 逆时针旋转（图 3），当边 PM 旋转 50°时停止.

①边 PQ 从平移开始，到绕点 D 旋转结束，求边 PQ 扫过的面积；

②如图 2，点 K 在 BH 上，且 BK=$9-4\sqrt{3}$. 若△PQM 右移的速度为每秒 1 个单位长，绕点 D 旋转的速度为每秒 5°，求点 K 在△PQM 区域（含边界）内的时长;

③如图 3，在△POM 旋转过程中，设 PO，PM 分别交 BC 于点 E，F，若 BE=d，直接写出 CF 的长（用含 d 的式子表示）.

解题过程：

解（1）$\because AD//BC, \angle ABC = 90°$

所以$\angle BAD = 90°$,

因为 $DH \perp BC$ ，

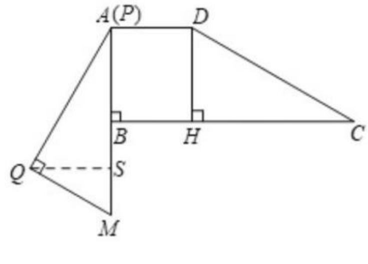
所以$\angle DHB = 90°$,

所以四边形 ABHD 为矩形，

所以 $DH = AB = 2\sqrt{3}$,

Rt△DHC 中，∠C=30°，所以 $CD = 2DH = 4\sqrt{3}$

在△PQM 和△CHD 中



因为$\begin{cases}\angle Q=\angle DHC=90^\circ\\ \angle QPM=\angle C=30^\circ\\ PM=CD=4\sqrt{3}\end{cases}$

所以$\triangle PQM\cong\triangle CHD$

（2）①作 $QS\perp AM$, AQ=CH=6,

在 Rt$\triangle$QAS 中， $AS=AQ\cdot COS\angle QAS=6\cdot COS30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,

平移扫过的面积：$S_1=AD\cdot AS=3\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

选择扫过的面积：$S_2=\frac{50\pi PQ^2}{360}=\frac{50\pi 6^2}{360}=5\pi$

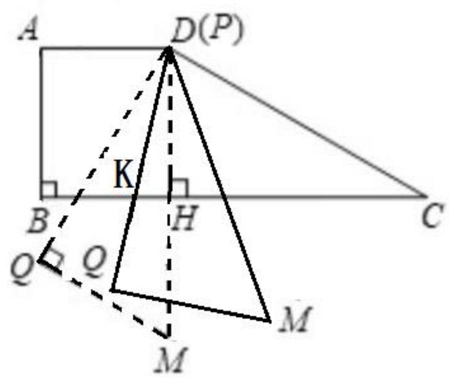
故 PQ 扫过的面积： $S=S_1+S_2=9\sqrt{3}+5\pi$.

②运动分为两个阶段：平移和旋转

解法（一）

平移阶段：$KH=3-BK=3-(9-4\sqrt{3})=4\sqrt{3}-6$,

则$t_1=\frac{KH}{v}=\frac{4\sqrt{3}-6}{1}=(4\sqrt{3}-6)$秒，



旋转阶段：$CK=BC-BK=9-(9-4\sqrt{3})=4\sqrt{3}$,

所以 $CD=CK$

所以$\angle CDK=\angle CKD=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$，

由旋转：$\angle MDH=\angle KDQ=95^\circ-75^\circ=15^\circ$，

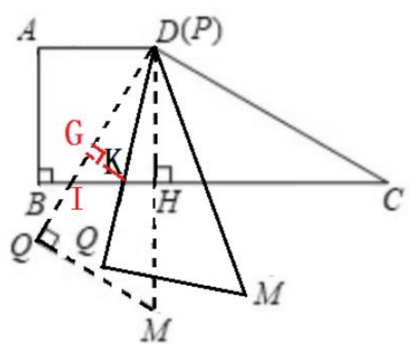
则$t_2=\frac{\angle MDH}{5^\circ}=\frac{15^\circ}{5^\circ}=3$ 秒.

总时间：$t=t_1+t_2=4\sqrt{3}-6+3=(4\sqrt{3}-3)$秒.

解法（二）

平移阶段：$KH=3-BK=3-(9-4\sqrt{3})=4\sqrt{3}-6$,

则$t_1=\frac{KH}{v}=\frac{4\sqrt{3}-6}{1}=(4\sqrt{3}-6)$秒，



旋转阶段：$\triangle$IKD 中,作 $KG\perp DB$,

则 $KG=\frac{IK\cdot DH}{DI}=\frac{(2-KH)\cdot DH}{DI}=\frac{(2-4\sqrt{3}+6)\cdot 2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}-6$

所以 $KG=KH$

由旋转，$\angle KDQ=\angle KDH=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ=\angle MDH$，

则$t_2=\frac{\angle MDH}{5^\circ}=\frac{15^\circ}{5^\circ}=3$ 秒.

答：$CF=\frac{60-12d}{9-d}$

解法（一）

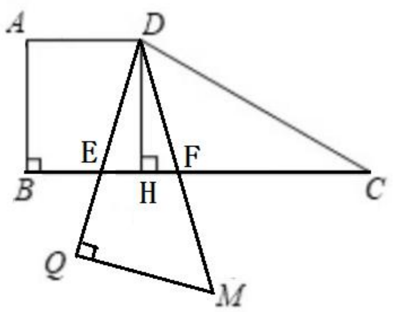
因为 $\angle EDF=\angle C$, $\angle DEF=\angle CED$

所以$\Delta EDF \sim \Delta ECD$

所以$\frac{DE}{CE}=\frac{EF}{DE}$,即$DE^2=EF\cdot CE$,

所以$EF=\frac{DE^2}{CE}=\frac{DE^2}{CE}=\frac{EH^2+DH^2}{CE}=\frac{(3-k)^2+(2\sqrt{3})^2}{9-d}$,

所以$CF=9-BE-EF=9-d-\frac{(3-d)^2+(2\sqrt{3})^2}{9-d}=\frac{60-12d}{9-d}$



解法（二）

设$\angle HDF=\alpha$,则$\angle EDH=30°-\alpha$，

Rt△EDH 中，$\tan\angle EDH=\tan(30°-\alpha)=\frac{EH}{DH}=\frac{3-d}{2\sqrt{3}}$ ，

所以 $\tan\angle HDF=\tan\alpha=\tan[30°-(30°-\alpha)]=\frac{\tan 30°-\tan(30°-\alpha)}{1+\tan 30°\cdot\tan(30°-\alpha)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{3-d}{2\sqrt{3}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3-d}{2\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}d-\sqrt{3}}{9-d}$ ，

所以 $HF=DH\cdot\tan\angle HDF=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}d-\sqrt{3}}{9-d}=\frac{6d-6}{9-d}$ ，

所以$CF=CH-HF=6-\frac{6d-6}{9-d}=\frac{60-12d}{9-d}$.

试题分析：第（1）问是几何中常见问题——证明三角形全等，需要提取条件寻找证明全等的几何要素，方法并不唯一，考察了几何证明的逻辑与推理的能力.

第（2）问的问题①问题很直接，考察了平行四边形的面积公式和扇形的面积公式的应用，学生只要能代入基本量，运用公式进行计算，就可以比较轻松的拿下.

第（2）问的问题②, △PQM 先平移后旋转，由于平移距离容易确定，平移的时间容易确定. △PQM 绕点 D 进行了旋转，确定旋转角是一个难点，由旋转的性质，旋转角的确定转化成为求∠KDQ 的问题，上面给出了两种求∠KDQ 的方法. 解法一学生可先通过动手操作，直观感知△CDK 具有特殊性或者通过条件 $BK=9-4\sqrt{3}$ ，发现 $CD=CK$，即发现△CDK 是等腰三角形，已知顶角求底角，再求得目标角∠KDQ; 解法二也是以动手操作作为基础，猜测$\angle KDQ=\angle KDH$，从而根据条件运用等积法求得垂线段 KG 的长度，发现 $KG=KH$ ，从而运用 角分线定理的逆定理判断角等，最终确定目标角∠KDQ 的大小，再确定旋转时间. 解法一 和解法二的共同之处在于以动手操作作为直观基础，发现几何图形的特殊性，前者是发现等腰三角形，后者是发现角分线，中考题对能力的考察最终还是以考察特殊三角形和重点几何图形的性质为载体的.

第（2）问的问题③,充分显示出中考题的选拔性功能以及对于高中知识的一种衔接与导向性.△PQM 绕点 D 旋转的动态过程中，求 目标线段CF的过程转化为求线段 EF 的过程.

解法一 在旋转这个变化的过程中发现其中的不变量$\angle EDF=\angle C$，又由∠DEF 始终是公共角，从而依靠这两个要素发现相似三角形模型，由相似三角形的性质，利用比例线段DE、EF、CE ，构建比例式，列方程求解EF，整个求解的过程并不是很难，难点在于如何在目标的驱动下，在有限的时间内，发现相似模型，构建方程，逻辑条理的实施运算的过程.

解法二 运用高中知识——正切的差角公式 求得∠HDF 的正切值，再利用锐角三角函数知识求线段 HF 的长度，最终求得目标线段CF的长度, 应用差角公式的过程体现了方程的思想，和解法一相比较，思维难度降低了.

两种方法都需要在动态的数学情境中提炼出有效的数学模型，从而求得目标线段的长度,综合全面考察学生灵活运用知识解决问题的能力，凸显了中考题的选拔性功能.